Probabilités

1) Dans une loterie, il y a n tickets dont g sont gagnants. Quelle est le probabilité de gagner en achetant k tickets au hasard ?

---

2) Soient k et n deux entiers avec $1 \leqslant k \leqslant n$. On choisit au hasard deux entiers différents a, $b \in \{1, \ldots, n\}$ avec $a < b$.

a) Quelle est la probabilité pour que $a < k < b$? b) Pour quelle valeur de k cette probabilité est-elle maximum ?

---

3) Une information, vraie à l'origine, se répend dans une population. La probabilité qu'un habitant transmette fidèlement l'information reçue est de 0.8, et la probabilité qu'il transmette exactement le contraire est de 0.2.

On appelle V_n l'événement: " L'information transmise par le $n^{\text{ième}}$ personne est vraie", et on note p_n la probabilité de V_n.

a) Calculer p_1 et exprimer pour tout entier n p_{n+1} en fonction de p_n.

b) Calculer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

c) Qu'est-ce qui change à la limite si on remplace 4/5 par p avec $p \in]0, 1[$?

---

4) M. Martin décide d'essayer d'arrêter de fumer. Aujourd'hui il n'a pas fumé. On admet que:

- S'il ne fume pas un jour donné, il fumera le lendemain avec une probabilité de 0.3
- S'il fume un jour donné, il ne fumera pas le lendemain avec une probabilité de 0.9

On note l'événement F_n : "M. Martin fume le $n^{\text{ième}}$ jour" et p_n sa probabilité .

a) Calculer p_1 et exprimer pour tout entier n p_{n+1} en fonction de p_n.

b) Calculer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

---

5) Julie répond à une question pour laquelle elle a le choix entre n réponses possibles. Il y a une chance sur 10 pour que Julie connaisse la réponse et, si elle ne la connait pas, elle donne une réponse au hasard.

a) Quelle est la probabilité pour que Julie donne la bonne réponse ?

b) Pour le correcteur, quelle est la probabilité que Julie connaisse la bonne réponse alors qu'elle l'a donnée ?

---

6) Quand on téléphone chez Sophie, on a 5 chances sur 6 de tomber sur son répondeur. Sophie utilise systématiquement son répondeur lorsqu'elle s'absente, et une fois sur trois lorsqu'elle est chez elle.

a) Quelle est la probabilité pour que Sophie soit absente ?

b) Antoine téléphone chez Sophie et tombe sur le répondeur. Quelle est la probabilité pour que Sophie soit chez elle ?

---

7) On lance trois dés cubiques équilibrés, on regarde les numéros affichés.

Sachant que les trois numéros sont différents, quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas de 6 ?

---

8) Soient A et B deux événements avec $P(B) \in]0, 1[$. Exprimer $P_{\overline{B}}(\overline{A})$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

---

9) Soient A et B deux événements indépendants . Calculer $P(B)$ sachant que $P(A) = 0.2$ et $P(A \cup B) = 0.5$.

---

10) A un carrefour ou se trouve un feu tricolore, une étude statistique montre que:

- Si le feu est vert, 99 % des automobilistes passent sans s'arrêter.
- Si le feu est orange, 30 % des automobilistes passent sans s'arrêter
- Si le feu est rouge, 1 % des automobilistes passent sans s'arrêter

La durée des cycles (vert, orange, rouge) du feu est de (25 s, 5 s, 30 s).

Quelle est la probabilité qu'un automobiliste passe sans s'arrêter ?

---

11) Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. Prouver que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}$.

---

12) Sur sa console de jeu, Marc engage une partie dans laquelle il doit affronter l'un des trois monstres Alk, Bulk et Colk. Ces trois monstres sont de forces inégales. Les probabilités pour que Marc gagne le combat sont respectivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ suivant qu'il affronte Alk, Bulk ou Colk. Par ailleurs, Marc ne choisit pas son adversaire. Il doit affronter Alk une fois sur deux, et aussi souvent Bulk que Colk. Quelle est la probabilité pour que Marc gagne son combat ?

---

13) Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On tire successivement (sans remise) trois boules.

a) Calculer la probabilité p pour que les trois boules tirées soient successivement blanche, noire, blanche (BNB) .

b) Parmi les 8 tirages possibles (de BBB à NNN), quelle est le plus probable ?

---

14) Le dépistage de l'hyperthyroïdie s'effectue par un test basé sur le dosage de la TSH (La thyréostimuline, ou thyréotropine, en anglais TSH (thyroid-stimulating hormone). On sait que:

- chez les patients malades, 95 % des tests sont positifs
- chez les patients sains, 99 % des tests sont négatifs.

Sachant que la fréquence (on dit la prévalence) de l'hyperthyroïdie dans la population est de 1,5 %, calculer:

a) La probabilité d'être malade sachant que le test est positif.

b) La probabilité de ne pas être malade sachant que le test est négatif.

---

15) On s'intéresse à une population de plantes de génotype AA, Aa ou aa se reproduisant par autogamie (autofécondation).

Une plante de génotype AA (resp. aa) donne par autogamie une plante de génotype AA (resp. aa).

Une plante de génotype Aa donne par autogamie une plante de génotype AA (ou aa) avec une probabilité de $\frac{1}{4}$et une plante de génotype Aa avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Dans la population initiale les proportions de plantes avec des génotypes AA, Aa ou aa sont x_0, y_0 et z_0.

On note x_n (resp. y_n et z_n) les proportions de plantes de la $n^{\text{ième}}$ génération avec des génotypes AA, Aa ou aa.

a) Calculer x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1} en fonction de x_n, y_n, z_n.

b) Calculer les limites des trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) puis interpréter.

---

16) Une compagnie d'assurance automobile classe ses assurés en trois classes d'âges:

- Classe 1: moins de 25 ans
- Classe 2: entre 25 et 50 ans
- Classe 3: plus de 50 ans

On donne la proportion d'assurés dans chaque classe ainsi que la probabilité, pour chaque classe, d'avoir eu au moins un accident l'année précédente:

Classe	Proportion	Probabilité
1	0.25	0.12
2	0.53	0.06
3	0.22	0.09

a) Quelle est la probabilité pour qu'un assuré ait eu un accident l'année précédente ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'un assuré ayant déclaré un accident l'année précédente ait moins de 25 ans ?

c) Quelle est la probabilité pour qu'un assuré de plus de 25 ans ait déclaré un accident l'année précédente ?

d) Quelle est la probabilité pour qu'un assuré n'ayant déclaré aucun accident l'année précédente ait entre 25 et 50 ans ?

---

17) Une loterie se déroule chaque semaine. Sur 100 billets, trois sont gagnants. Luc décide d'acheter 10 billets mais hésite entre deux stratégies pour gagner. Que lui conseillez vous ?

(1) Acheter les 10 billets la même semaine

(2) Acheter un billet chaque semaine pendant 10 semaines

---

18) Un gène se présente sous deux allèles (deux variantes) A et a.

Un individu dispose de deux allèles du même gène (c'est à dire AA, Aa ou aa), reçus au hasard de chacun de ses parents.

On note p, q, r les proportions des génotypes AA, Aa et aa dans une génération et P, Q, R les proportions des génotypes AA, Aa et aa dans la génération suivante. prouver que $Q^2 = 4\,P\,R$.

---

19) Une puce fait des sauts aléatoires sur les trois sommets d'un triangle ABC. A chaque saut, elle peut rester sur place ou sauter vers l'un des deux autres sommets du triangle. Au départ elle se trouve sur le sommet C. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- $\forall$ M, N $\in$ {A, B, C}, on note p_{MN} la probabilité qu'elle saute du sommet M vers le sommet N.
- On donne $p_{\mathrm{CA}} = p_{\mathrm{CB}} = p_{\mathrm{CC}} = \frac{1}{3}$, $p_{\mathrm{BA}} = p_{\mathrm{BB}} = \frac{1}{2}$, $p_{\mathrm{AA}} = 1$.
- A_n, B_n, C_n les événements: "après le $n^{\text{ième}}$ saut la puce se trouve en A, B ou C" et a_n, b_n, c_n leurs probabilités.
- On a_0, b_0 et c_0 les probabilités que la puce soit en A, B ou C au départ. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice M telle que pour tout entier n, $X_{n+1} = M X_n$,

b) Calculer en fonction de n: a_n, b_n et c_n. En déduire M^n.

c) Lorsque n croît, où a-t-on le plus de chances de trouver la puce ?

---

20) On met en place un test diagnostic d'une maladie m dont la fréquence (ou prévalence) dans la population est $p \in]0, 1[$.

On choisit une personne au hasard et on lui fait subir le test. On définit les événements:

- T: "le test est positif chez cette personne"
- M: "la personne a la maladie m"

La fabriquant du test indique:

- la probabilité $P_M(T)$, appelée sensibilité du test et notée Se qu'une personne malade ait un test positif.
- la probabilité $P_{\overline{M}}(\overline{T})$, appelée spécificité du test et notée Sp qu'une personne saine ait un test négatif.

On appelle:

- valeur prédictive positive du test, et on note VPP, la probabilité VPP $= P_T(M)$ d'être malade sachant que le test est positif.
- valeur prédictive négative du test, et on note VPN, la probabilité VPN $= P_{\overline{T}}(\overline{M})$ d'être sain sachant que le test est négatif.

a) Calculer en fonction de p, Se et Sp la probabilité P_{correct} que le test délivre une juste conclusion.

b) Calculer VPP et VPN en fonction de p, Se et Sp.

c) <u>Exemple</u>: test du paludisme (Se=0.95 et Sp=0.85) en Afrique (prévalence = 90 %) et en France (prévalence = 0.1 %).

Calculer p_{correct}, VPP et VPN. Que peut-on dire à un patient français ou africain après un test ?

d) On garde Se=0.95 et Sp=0.85 .

α) Dans quelle intervalle doit être la prévalence p pour que VPP $\geqslant 0.5$?

β) Dans quelle intervalle doit être la prévalence p pour que VPN $\geqslant 0.999$?

e) Quel inconvénient présente le dépistage systématique dans une population d'une maladie rare ?

---

21) On considère $n + 1$ urnes numérotées de 0 à n telles que l'urne numéro k contienne k boules blanches et $n - k$ boules noires.
On choisit une urne au hasard et on effectue des tirages avec remises au hasard dans cette urne.

a) Calculer la probabilité p_N pour que les N premiers tirages donnent des boules blanches, puis déterminer la limite de p_N lorsque $N \longrightarrow +\infty$ (avec n fixé) puis lorsque $n \longrightarrow +\infty$. (avec N fixé) .

b) Calculer la probabilité q_N pour que la $N + 1$ boule tirée soit noire sachant que les N premières boules tirées étaient blanches, puis déterminer la limite de q_N lorsque $N \longrightarrow +\infty$ (avec n fixé) puis lorsque $n \longrightarrow +\infty$. (avec N fixé) .

---

22) On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité $\frac{1}{8}$, 1 ou 2 descendants avec la probabilité $\frac{3}{8}$ et aucun descendant avec la probabilité $\frac{1}{8}$. Au départ la population est composée d'un seul individu.

On note x_n la probabilité pour que l'espèce ait disparue apès la $n^{\text{ième}}$ génération.

a) Calculer x_1 et x_2. b) Calculer x_{n+1} en fonction de x_n et prouver que la suite (x_n) converge vers $2 - \sqrt{5}$. Interpréter ce résultat.
