Séries numériques

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes (exercices 1 à 10)

1) $\sum n^3 e^{-n}$ 2) $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ 3) $\sum \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ 4) $\sum \left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ 5) $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ 6) $\sum \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$

---

7) $\sum \left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^{\ln(n)}$ 8) $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$? 9) $\sum \frac{1}{1+z^n}$ $(z \in \mathbb{C})$ 10) $\sum \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^{2\alpha}}} - 1\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

---

11) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes.

Prouver que les séries $\sum \max(u_n, v_n)$, $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \frac{u_n v_n}{u_n+v_n}$ sont convergentes.

---

12) Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente à termes complexes. Prouver que la série $\sum {u_n}^2$ est convergente.

---

13 Justifier l'existence et calculer $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. 14) Sachant que $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $T = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

---

15) Pour $x \in]-1, 1[$ calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\, x^k$. 16) Pour $\alpha > 1$, chercher un équivalent du reste R_n de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

---

17) On admet que $e = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Calculer $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}$, $B = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$, $C = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$.

---

18) Chercher une écriture télescopique et calculer la somme des séries $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et $\sum \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

---

19) En remarquant que $\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}\, dt$, démontrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et calculer sa somme.

---

20) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$? 21) Trouver un équivalent de $u_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

---

22) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. prouver que la série $\sum \frac{1}{(x+n)^2}$ est convergente et trouver un équivalent de sa somme $f(x)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

---

23) Trouver toutes les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $\sum \left(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\right)$ soit convergente et calculer alors la somme.

---

24) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - {u_n}^2$. Etudier la convergence de la série $\sum {u_n}^2$.

---

25) Prouver que la série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente, puis que $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$. 26) Calculer $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^2-9}$

---

27) Déterminer la limite si $x \longrightarrow 1$ de $S(x) = (x-1) \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. 28) Déterminer la limite si $x \longrightarrow +\infty$ de $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$

---

29) a) Justifier la convergence de la suite $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. On note $\gamma = \lim\ u_n$. b) Calculer $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$

---

30) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a) Prouver que (u_n) est décroissante et converge vers 0 .

b) Prouver que ${u_n}^3 \sim 6(u_{n+1} - u_n)$. Quelle est la nature de la série $\sum {u_n}^3$?

c) Prouver que ${u_n}^2 \sim 6 \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. Quelle est la nature de la série $\sum {u_n}^2$?