Déterminants

1) Factoriser $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a+b & a\,b & a^2+b^2 \\ b+c & b\,c & b^2+c^2 \\ c+a & a\,c & c^2+a^2 \end{vmatrix}$.

2) Factoriser $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$

---

3) Calculer $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} b+c & c & b \\ c & c+a & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix}$.

4) Factoriser $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} -2\,a & a+b & a+c \\ b+a & -2\,b & b+c \\ c+a & c+b & -2\,c \end{vmatrix}$.

---

5) Calculer ${}^tA \times A$ puis factoriser $\det(A)$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

---

6) Trouver les $x \in \mathbb{C}$ tels que $M(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} - x\,I$ est inversible ?

---

7) Prouver qu'une matrice antisymétrique 5×5 a un déterminant nul.

---

8) Prouver que si il existe $f \in L(E)$ vérifiant $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$, alors $\dim(E)$ est un entier pair.

---

9) Prouver que $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2\,(a\,b + a\,c + b\,c)^3$.

---

10) On pose $D(x) = \begin{vmatrix} x & b & b \\ a & x & b \\ a & a & x \end{vmatrix}$ et $\Delta(y) = \begin{vmatrix} x+y & b+y & b+y \\ a+y & x+y & b+y \\ a+y & a+y & x+y \end{vmatrix}$ pour $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, avec .

a) Prouver que $\Delta(y)$ est une fonction affine de y et calculer $\Delta(y)$ à partir de $\Delta(-a)$ et $\Delta(-b)$.

b) En déduire la solution réelle de l'équation $D(x) = 0$. Et si $a = b$?

c) Application: Trouver la valeur exacte de la solution réelle de l'équation $x^3 + x + 1 = 0$.

---

11) Prouver simplement que: $S = \begin{vmatrix} \sin 2\,a & \sin(a+b) & \sin(a+c) \\ \sin(a+b) & \sin 2\,b & \sin(b+c) \\ \sin(a+c) & \sin(b+c) & \sin 2\,c \end{vmatrix} = 0$ et $C = \begin{vmatrix} 1 & \cos(t) & \cos(2\,t) \\ \cos(t) & \cos(2\,t) & \cos(3\,t) \\ \cos(2\,t) & \cos(3\,t) & \cos(4\,t) \end{vmatrix} = 0$.

---

12) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $A = a^2 + b^2 + c^2$ et $B = a\,b + a\,c + b\,c$ et $D = \begin{vmatrix} A & B & A \\ A & A & B \\ B & A & A \end{vmatrix}$

Ecrire D comme le produit de deux déterminants et en déduire D.

---

13) Calculer $H = (\,|\,i - j\,|)_{n \times n}$.

---

14) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n \in \mathbb{C}$. Caculer $D = \left| a_i + b_j \right|_{n \times n}$.

15) On pose $D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$. En commençant par $C_2 \longleftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ puis $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$, relier D à $\Delta = \begin{vmatrix} c & -a & -b \\ c^2 & -a^2 & -b^2 \\ c^3 & -a^3 & -b^3 \end{vmatrix}$ et en déduire l'expression factorisée de D.

---

16) Calculer $D_n(a, b) = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & b \\ 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$. (Chercher une relation de récurrence)

---

18) Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (Développer suivant la seconde ligne)

---

19) Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

---

20) Calculer $D_n(a, b) = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ b & a+b & a & \cdots & a \\ b & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a+b & a \\ b & b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$ (Prouver que $D_n(a, b) = a\, D_{n-1} + b^n$)

---

21) Soients $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

a) Calculer $\det \left(a_{\text{maxi}\,(i,j)}\right)_{n\times n}$.

b) En déduire $\det\left(\text{maxi}\,(i, j)\right)_{n\times n}$.

---

22) Prouver que pour $k \leqslant n-2$, alors $D_n(k) = \left|(i+j)^k\right|_{n\times n} = 0$. (Se souvenir que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$) .

---

23) On pose $D_n = \left| a_{i,j}\right|_{n\times n}$ avec $a_{i,j} - 1 = (i-j)\,[n]$. Prouver que $D_n = (-1)^{n+1}\,\frac{(n+1)\, n^{n-1}}{2}$.
