Matrices et applications linéaires

1) Quelle est la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $f(P) = (X-1)\,P'\,(X+1)$?

---

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{rg} A$.

---

3) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Prouver que f est une projection et trouver des bases de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.

---

4) Soit f de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base $B = (i, j, k)$. Déterminer $\underset{C}{\operatorname{Mat}} f$ avec $C = (i+j+k,\ i-j,\ i+j-2k)$.

---

5) Chercher des bases de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ avec $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $\underset{B}{\operatorname{Mat}}\ f = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans une base $B = (i, j, k)$ donnée.

---

6) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice en base $B = (e_i)$ est $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$. Calculer $\underset{C}{\operatorname{Mat}}\ f$ avec $C = (e_1 + e_2 + e_3,\ e_2,\ e_3)$.

---

7) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $f(M) = AM - MA$ pour $M \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Prouver que $f \in L(M_n(\mathbb{R}))$

b) Déterminer des bases de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

---

8) Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(t) \\ -1 & 0 & \cos(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{rg} A$.

---

9) Soit l'endomorphisme de $f \in L(\mathbb{R}_n[X])$ défini par $f(P) = P(X+1)$.

a) Calculer la matrice A de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

---

10) Soient B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in L(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On pose $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C = (i,\ j,\ k)$.

a) Calculer $f(i)$, $f(j)$, $f(k)$ et en déduire $D = \underset{C}{\operatorname{Mat}}\ f$.

b) Exprimer A en fonction de D et de $P = P(B, C)$.

c) Calculer A^n en fonction de P et de n.

---

11) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base C telle que $D = \underset{C}{\text{Mat}}\ f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

---

12) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Prouver qu'il existe une base B de $\mathbb{R}^3$ telle que $\underset{B}{\text{Mat}}\ f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

13) Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour $P \in E$ on pose $f(P) = \left(X^k P(X)\right)^{(k)}$.

Prouver que $f \in L(E)$ et calculer la matrice de f dans la base canonique de E.

---

14) Calculer le rang de $M = \left(a_{i,j}\right)_{n\times n}$ avec $a_{i,j} = 1$ lorsque $(i = j)$ ou $(j = i+1)$ ou $((i = n)$ et $(j = 1))$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

---

15) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$. Prouver qu'il existe une base B de $\mathbb{R}^3$ telle que $\underset{B}{\text{Mat}}\ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

16) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

a) Prouver qu'il existe $x \in E$ tel que $B = \left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ soit une base de E.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, Calculer la matrice de f^k dans cette base B.

---

17) Pour $a, b, c \in \mathbb{C}$ on note $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$. On pose $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C = (f_1, f_2, f_3)$.

Soit $u \in L(\mathbb{C}^3)$ canoniquement associé à M.

a) Montrer que C est une base de $\mathbb{C}^3$ et calculer $D = \underset{C}{\text{Mat}}\ u$.

b) Comment peut on en déduire M^n ?

---

18) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que rg $M = 1$

b) Trouver une base B dans laquelle la matrice de f soit une matrice ayant huit zéro.

c) Est-ce possible de trouver une telle base pour toutes les 3×3 matrices M de rang 1 ?
