Calcul intégral

Calculer les intégrales ou les primitives suivantes:

1) $\int \text{Arcsin}(x)\,dx$ 2) $\int \text{Arctan}(x)\,dx$ 3) $\int \sin(2x)\,e^x\,dx$ 4) $\int \sqrt[3]{(2x-3)}\,dx$ 5) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^2+1}\,dt$

6) $\int \frac{dx}{x\ln(x)}$ 7) $\int \frac{dx}{x^3+x}$ 8) $\int \frac{1+x}{x^2+4x+5}\,dx$ 9) $\int \frac{x^3+2x}{x^4+1}\,dx$ 10) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

11) $\int \frac{dx}{3-x^2}$ 12) $\int \tan^3(x)\,dx$ 13) $\int \frac{x^3}{x^2+4x+4}\,dx$ 14) $\int \frac{x^2}{x^2-x+1}\,dx$ 15) $\int \frac{2-5x}{x^2+x-2}\,dx$

16) $\int \cos^5(x)\,dx$ 17) Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{x}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ puis calculer $I = \int \frac{x}{x^3-1}\,dx$

18) $\int \frac{\sin(x)}{\cos(2x)}\,dx$ (Poser $t = \cos(x)$) 19) $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$ 23) $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin(t)}\,dt$ (Poser $t = \frac{\pi}{2} - x$)

20) $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(px)\,dx$ (avec $n, p \in \mathbb{N}$) 21) $\int \frac{dx}{3+\sin^2(x)}$ (Poser $t = \tan(x)$) 22) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x}}$ (Poser $t = \sqrt{1+x}$)

23) Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,dx$ (poser $t = \frac{\pi}{4} - x$) 24) Soit $a > 0$. Calculer $I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\text{dx}$ (Poser $t = \frac{1}{x}$)

25) Trouver une relation de récurrence entre les intégrales $J_p = \int \frac{\text{sh}(x)}{x^p}\,dx$ et en déduire $I = \int \frac{(x^2-2)\,\text{sh}(x)}{x^3}\,dx$.

26) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \int_a^b (t-a)^n\,(b-t)^n\,dt$. (Faire plusieurs IPP successives).

En déduire $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$ puis $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\,dt$.

27) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}$.

a) Calculer I_1 et I_2. b) En intégrant par parties $J_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1+x^n}}$, calculer I_n .

28) Prouver que $\forall\, a \in]0, \pi[$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(a)}{1+\cos(a)\cos(x)}\,dx = a$. (Poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$) 29) Calculer $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx$

30) On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\,dt$ pour $n \in \mathbb{N}$, ainsi que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer I_0 et I_1. b) Chercher une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

c) Exprimer I_n en fonction de u_n ou v_n en distinguant suivant la parité de n.

d) Prouver (sans utiliser c)) que la suite (I_n) converge vers 0. e) Calculer les limites des deux suites (u_n) et (v_n) .

31) On pose $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{5+4\cos(t)}\,dt$ pour $n \in \mathbb{N}$

a) Calculer I_0. (Poser $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$) b) Calculer $I_{n+2} + I_n$ en fonction de I_{n+1}. (Exprimer $\frac{x}{5+4x}$ en fonction de $\frac{1}{5+4x}$)

c) Calculer I_1 en fonction de I_0. d) Calculer I_n en fonction de n .

32) On veut calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\cos^n(x)\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}$. a) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)\sin(x)\cos^{n-1}(x)\,dx$.

b) En déduire que si $n \geqslant 2$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\cos^{n-2}(x)\,dx = 0$ puis que si $n \geqslant 1$, $I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}$. c) Calculer I_n pour $n \in \mathbb{N}$.