Espaces vectoriels de dimension finie

1) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que $f((1, 0, 0)) = (0, 1)$ et $f((1, 1, 0)) = (1, 0)$ et $f((1, 1, 1)) = (1, 1)$.
Calculer $f((x, y, z))$. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker} f$ et de $\mathrm{Im} f$ ainsi que leurs dimensions.

2) Soient F et G deux sev de $\mathbb{R}^4$ tels que $\dim(F) + \dim(G) = 5$. Prouver que $\dim(F \cap G) = 1$ ou que $\dim(F \cap G) = 2$.

3) Soit $B = (a, b, c, d)$ une base d'un espace vectoriel E.
Les familles $C = (a + b, b + c, c + d, d + a)$ et $D = (a + b + c, b + c + d, c + d + a, d + a + b)$ sont-elles des bases de E ?

4) Soit E l'ensemble des suites 3-périodique de réels. Prouver que E est un espace vectoriel de dimension finie et calculer $\dim E$.

5) Soit $f \in L(\mathbb{R}^4)$ définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1)$.
a) Déterminer des bases de $\mathrm{Ker} f$ et de $\mathrm{Im} f$. b) A-t-on $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^4$?

6) Prouver que $\mathrm{Vect}(x \longrightarrow 1, x \longrightarrow \cos(x), x \longrightarrow \cos(2x), x \longrightarrow \cos(3x)) = \mathrm{Vect}(x \longrightarrow 1, x \longrightarrow \cos(x), x \longrightarrow \cos^2(x), x \longrightarrow \cos^3(x))$.
Est-ce encore vrai si l'on remplace les cosinus par des sinus ?

7)Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = \sin(x + a)$, $g(x) = \sin(x + b)$ et $h(x) = \cos(x + c)$.
Prouver que ces trois fonctions f, g, h sont dans Vect(sin, cos) et en déduire que la famille (f, g, h) est liée.

8) On pose $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 2z = 0\}$. Montrer que H est un sev de $\mathbb{R}^4$, trouver une base de H puis une base d'un supplémentaire G de H dans $\mathbb{R}^4$.

9) On pose $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $k(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Dans $F(]-1, 1[, \mathbb{R})$, trouver $\dim \mathrm{vect}(f, g, h, k)$.

10) Prouver que $B = ((X-1)(X-2)(X-3), X(X-2)(X-3), X(X-1)(X-3), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et trouver les coordonnées de $P = X^3$ puis $Q = 1$ dans la base B.

11) Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que $f \circ f = 0$. Comparer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire que $\mathrm{rg} f \leqslant \frac{n}{2}$.

12) On pose $f((x, y, z, t)) = (x + 3y + z - t, 2x + 2y + z, 3x + y + z + t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Calculer $\mathrm{rg}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

13) Soient $u, v \in L(\mathbb{R}^n)$ tels que $u \circ v = 0$. Prouver que $\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v \leqslant n$.

14) Calculer le terme général de la suite (u_n) définie par: $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}, 5u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

15) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = P(X+1) - P(X)$.
a) Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et en déduire $\mathrm{Im} f$. b) Calculer $f \circ f$, déterminer $\mathrm{Ker}(f \circ f)$ et $\mathrm{Im}(f \circ f)$.

16) Soit $f \in L(E)$ et V un sev de E de dimension finie tels que $V \subset f(V)$. Prouver que $f(V) = V$.
Prouver que ce n'est plus nécessairement le cas si V n'est pas de dimension finie.

17) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $f \circ f \neq 0$ et $f \circ f \circ f = 0$. Prouver qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $(v, f(v), f^2(v))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
Donner un exemple d'une telle application f.

18) Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ injectif et non surjectif puis un autre surjectif et non injectif.

19) Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$ de rang 1. Prouver qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f = af$. Est-ce que la réciproque est vraie ?