

## Espaces vectoriels de dimension finie

1) Soit  $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  telle que  $f((1, 0, 0)) = (0, 1)$  et  $f((1, 1, 0)) = (1, 0)$  et  $f((1, 1, 1)) = (1, 1)$ .

Calculer  $f((x, y, z))$ . Déterminer des bases de  $\text{Ker } f$  et de  $\text{Im } f$  ainsi que leurs dimensions.

2) Soient  $F$  et  $G$  deux sev de  $\mathbb{R}^4$  tels que  $\dim(F) + \dim(G) = 5$ . Prouver que  $\dim(F \cap G) = 1$  ou que  $\dim(F \cap G) = 2$ .

3) Soit  $B = (a, b, c, d)$  une base d'un espace vectoriel  $E$ .

Les familles  $C = (a + b, b + c, c + d, d + a)$  et  $D = (a + b + c, b + c + d, c + d + a, d + a + b)$  sont-elles des bases de  $E$  ?

4) Soit  $E$  l'ensemble des suites 3-périodique de réels. Prouver que  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie et calculer  $\dim E$ .

5) Soit  $f \in L(\mathbb{R}^4)$  définie par  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1)$ .

a) Déterminer des bases de  $\text{Ker } f$  et de  $\text{Im } f$ .      b) A-t-on  $\text{Ker } f + \text{Im } f = \mathbb{R}^4$  ?

6) Prouver que  $\text{Vect}(x \rightarrow 1, x \rightarrow \cos(x), x \rightarrow \cos(2x), x \rightarrow \cos(3x)) = \text{Vect}(x \rightarrow 1, x \rightarrow \cos(x), x \rightarrow \cos^2(x), x \rightarrow \cos^3(x))$ .

Est-ce encore vrai si l'on remplace les cosinus par des sinus ?

7) Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . On pose  $f(x) = \sin(x + a)$ ,  $g(x) = \sin(x + b)$  et  $h(x) = \cos(x + c)$ .

Prouver que ces trois fonctions  $f, g, h$  sont dans  $\text{Vect}(\sin, \cos)$  et en déduire que la famille  $(f, g, h)$  est liée.

8) On pose  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$ . Montrer que  $H$  est un sev de  $\mathbb{R}^4$ , trouver une base de  $H$  puis une base d'un supplémentaire  $G$  de  $H$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

9) On pose  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ,  $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ,  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $k(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ . Dans  $F(]-1, 1[; \mathbb{R})$ , trouver  $\dim \text{vect}(f, g, h, k)$ .

10) Prouver que  $B = ((X-1)(X-2)(X-3), X(X-2)(X-3), X(X-1)(X-3), X(X-1)(X-2))$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  et trouver les coordonnées de  $P = X^3$  puis  $Q = 1$  dans la base  $B$ .

11) Soit  $f \in L(\mathbb{R}^n)$  tel que  $f \circ f = 0$ . Comparer  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  et en déduire que  $\text{rg } f \leq \frac{n}{2}$ .

12) On pose  $f((x, y, z, t)) = (x + 3y + z - t, 2x + 2y + z, 3x + y + z + t)$  pour  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . Calculer  $\text{rg}(f)$  et une base de  $\text{Ker}(f)$ .

13) Soient  $u, v \in L(\mathbb{R}^n)$  tels que  $u \circ v = 0$ . Prouver que  $\text{rg } u + \text{rg } v \leq n$ .

14) Calculer le terme général de la suite  $(u_n)$  définie par:  $u_1 = -1; u_2 = 1; \forall n \in \mathbb{N}, 5u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ .

15) Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par  $f(P) = P(X+1) - P(X)$ .

a) Déterminer  $\text{Ker } f$  et en déduire  $\text{Im } f$ .      b) Calculer  $f \circ f$ , déterminer  $\text{Ker}(f \circ f)$  et  $\text{Im}(f \circ f)$ .

16) Soit  $f \in L(E)$  et  $V$  un sev de  $E$  de dimension finie tels que  $V \subset f(V)$ . Prouver que  $f(V) = V$ .

Prouver que ce n'est pas nécessairement le cas si  $V$  n'est pas de dimension finie.

17) Soit  $f \in L(\mathbb{R}^3)$  telle que  $f \circ f \neq 0$  et  $f \circ f \circ f = 0$ . Prouver qu'il existe  $v \in \mathbb{R}^3$  tel que  $(v, f(v), f^2(v))$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Donner un exemple d'une telle application  $f$ .

18) Trouver un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  injectif et non surjectif puis un autre surjectif et non injectif.

19) Soit  $f \in L(\mathbb{R}^n)$  de rang 1. Prouver qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f \circ f = af$ . Est-ce que la réciproque est vraie ?