Espaces vectoriels

1) Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ usuel ?

$A = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_1 + x_2 = 0\}$ $B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_1 x_2 = 0\}$ $C = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,/\, x_1 = x_2 = 0\}$

2) Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ usuel ?

$A = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P(1) = 0\}$ $B = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P(X) = 2P(-X)\}$ $C = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \exists\, a \in \mathbb{R} \,/\, P(a) = 0\}$

3) Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de l'espace vectoriel $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

$A = \{$fonctions bornées$\}$ $B = \{$fonctions de classe $C^n\}$ $C = \{$fonctions $2\pi-$périodiques$\}$ $D = \{$ fonctions périodiques$\}$

4) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. On pose $C = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \,/\, A M = M A\}$. Prouver que C est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

5) On pose $M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & a \\ a & b-a \end{pmatrix}$. Prouver que $E = \{M(a, b) \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $M_2(\mathbb{R})$ et trouver une base de E

6) Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de l'espace vectoriel S des suites de réels ?

A = { suites géométriques} B = {suites arithmétiques } C = {suites (x_n) telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$}.

7) On pose $f(P) = 2P - XP'$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que $f \in L(\mathbb{R}[X])$ et calculer $\mathrm{Ker} f$.

8) Montrer que l'application φ définie sur $E = C^\infty(\mathbb{R})$ par: $\forall\, f \in E$, $\varphi(f) = f'' - f' + f$ est un endomorphisme de E et calculer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

9) Un sev A d'un ev E est dit stable par un endomorphisme $f \in L(E)$ lorsque $f(A) \subset A$.
Soient $f, g \in L(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Prouver que $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont stables par g.

10) Soient $f, g \in L(E)$. Comparer (pour l'inclusion): a) $\mathrm{Ker} f \bigcap \mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Ker}(f + g)$ b) $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im}\, g$ et $\mathrm{Im}(f + g)$.

11) Soient A et B deux sev de E. Prouver que $A \bigcup B$ est un sev de $E \Leftrightarrow A \subset B$ ou $B \subset A$.

12) Si A est un sous espace vectoriel de E, montrer que $A + A = A$

13) Soient A, B, C trois sev d'un K ev E. On suppose que: $A \bigcap B = A \bigcap C$ et $A + B = A + C$ et $B \subset C$. Prouver que $B = C$.
Prouver que chacune des trois hypothèses est indispensable.

14)a) Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que $(a = (1, 2, 1)\,,\, b = (1, 1, -1)\,,\, c = (3, 2, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Soit p la projection sur $\mathrm{Vect}(a)$ suivant $\mathrm{Vect}(b, c)$ et s la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(b, c)$ suivant $\mathrm{Vect}(a)$.
Etant donné $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $p(u)$ et $s(u)$ en fonction de x, y, z.

15) Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Démontrer que:
(1) $p \circ q = p \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$ (2) $q \circ p = p \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Im}\, q$ (3) $p + q$ est un projecteur $\Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0$

16) Soient E un K-ev et $f \in L(E)$ tels qu'il existe $a \in K^*$ tel que $f \circ f = a f$. Prouver que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$. Et si $a = 0$?

17) Soit $f \in L(E)$ telle que $f \circ f - 5f + 6\,\mathrm{Id}_E = 0$. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$.

18) Les trois fonctions $f : x \to 1$; $g : x \longrightarrow \cos(x)$; $h : x \to \cos(2x)$ forment-elles une famille libre dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

19) Soit $A = (P_0, P_1, \ldots P_n)$ une famille de polynômes telle que pour tout k, $\deg(P_k) = k$. Montrer que A est libre.

20) On pose $P_k = (X - 1)^k$ Montrer que $B = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.