Polynômes

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(X) = (1+X)\left(1+X^2\right)\left(1+X^4\right)\ldots\left(1+X^{2^n}\right)$.
Simplifier $Q(X) = (1-X)\,P(X)$ et en déduire l'expression développée de $P(X)$.

2) Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right)P(X)$.

3) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'^2 = 4\,P$. (Avec P' le polynôme dérivé de P)

4) A quelle condition sur les réels a et b est-ce-que le polynôme X^2+2 divise le polynôme $P(X) = X^4 + X^3 + a\,X^2 + b\,X + 2$?

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que $(X-1)^3$ divise le polynôme $P(X) = n\,X^{n+2} - (n+2)\,X^{n+1} + (n+2)\,X - n$.

6) Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ ayant n racines réelles distinctes. Montrer que P' admet $n-1$ racines réelles distinctes.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie $P_n(X) - P'_n(X) = X^n$. (Exprimer ses coeffcients avec des factorielles)

8) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est l'ensemble E des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = P(1) = P(2) =. .. = P(n)$?

9) Prouver que $\forall\, p, q, r \in \mathbb{N}$, $A = X^2 + X + 1$ divise $B = X^{3p+2} + X^{3q+1} + X^{3r}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

10) Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Trouver tous les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X+a) = P(X)$.

11) Trouver un polynôme P non nul tel que $(X-1)^3$ divise $P(X)+3$ et $(X+1)^3$ divise $P(X)-5$. (S'intéresser à P')

12) Pour quels $a \in \mathbb{C}$ est-ce que $X^2 - a\,X + 1$ divise $X^4 - X + a$?

13) Factoriser $P(X) = X^4 - 5\,X^3 + 9\,X^2 - 15\,X + 18$ sachant qu'il a deux racines dont le produit est 6.

14) a) Prouver que: α, β, γ sont les racines du polynôme $P(X) = a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d \iff \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = \dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$.

b) Soient x, y, z les racines complexes de $P(X) = X^3 + X^2 + 2\,X - 3$. Calculer:
$A = x+y+z$; $B = x\,y + x\,z + y\,z$; $C = x\,y\,z$; $D = x^2+y^2+z^2$; $E = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$; $F = x^2\,y^2 + x^2\,z^2 + y^2\,z^2$; $G = x^3+y^3+z^3$.

15) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{X(X+1)\ldots(X+k-1)}{k!}$.

16) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 + X^4 - 3\,X^3 - X + 2$.

17) Soit $P = X^4 - 4\,X^3 + X^2 + 6\,X + 2$. Prouver que $P(a) = 0 \Rightarrow P(2-a) = 0$ et En déduire la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

18) Trouver les complexes a tels que $P = (X+1)^5 - X^5 - a$ ait une racine d'ordre $\geqslant 2$ dans $\mathbb{C}[X]$

19) Trouver l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $P = X^4 + a\,X^2 + b\,X$ admette une racine d'ordre $\geqslant 2$ dans $\mathbb{C}$.

20) Trouver les $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $P = X^4 + 2\,a\,X^2 + 4\,b\,X - 3$ admette une racine d'ordre $\geqslant 3$ dans $\mathbb{C}$. Calculer l'autre racine.