Etude d'une fonction numérique

1) Combien l'équation $e^x(x-1) = e^{-x}(x+1)$ admet-elle de solutions réelles ?

2) Etudier les branches infinies de $f : x \to \frac{x^3-x^2+x}{x^2-3x+2}$

3) Etudier les branches infinies de $f : x \to x \operatorname{Arctan}(x)$.

4) Etudier les branches infinies de: $f : x \to \ln(1+2e^x) - 2\ln(1+e^{-x})$

5) On pose $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$. Prouver que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire et étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

6) a) Etudier la parité, puis trouver la plus petite période strictement positive de $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$.

b) Etudier f et tracer son graphe.

7) Etudier les branches infinies de $f : x \to \frac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln(x)}$.

8) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la fonction $f_a : x \longrightarrow a x - \frac{1}{1+x^2}$ est-elle monotone sur $\mathbb{R}$?

9) On pose $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$. Prolonger f par continuité en 0 , étudier la dérivabilité de f en 0 puis les variations de f.

10) a) Montrer que $\forall x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ b) Chercher la limite de $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

11) a) Prouver que $\forall x > 0,\ \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Chercher la limite de $u_n = \sum_{p=n+1}^{k.n} \frac{1}{p}$ lorsque $n \to +\infty$.

c) Prouver que la suite (v_n) de terme général $v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n)$ est convergente.

12) Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) \leqslant a f(x)$. Prouver que f est nulle.
(S'intéresser à $g(x) = e^{-a x} f(x)$).

13) Calculer $m = \inf\limits_{x,y>0} \sqrt{x+y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$.

14) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant e \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

15) Calculer les solutions à 10^{-10} près de l'équation $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 0$ par les méthodes de Newton et de dichotomie.
Quels problèmes a-t-on ?

16) Calculer les solutions à 10^{-10} près de l'équation $(2+\cos(x))(2+\operatorname{ch}(x)) = 9$ par la méthode de Newton.
Quels problèmes a-t-on ?

17) Dresser le tableau des variations de $f_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ sur $\mathbb{R}$.