

Dérivation. Accroissements finis

- 1) On pose pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$. Prolonger f par continuité en 0, puis étudier la dérivabilité de f en 0.
- 2) Prouver que: f est dérivable en $a \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ existe, mais que la réciproque est fautive.
- 3) Soit f deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'' \leq 0$ et $f(a) = f(b) = 0$. Prouver que $f \geq 0$ sur $[a, b]$.
- 4) Montrer que seules les fonctions constantes $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient: $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$.
- 5) Soit une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Etudier les équivalences: a) f est paire $\Leftrightarrow f'$ est impaire b) f est impaire $\Leftrightarrow f'$ est paire.
- 6) Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ puis de $g(x) = \frac{1}{(ax+b)^k}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$) en exploitant le premier calcul.
- 7) Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x^2) = f(x)$.
- 8) Calculer D_f puis la dérivée de $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{1/2 + \sqrt{x}}\right) + \arcsin\left(\sqrt{1/2 - \sqrt{x}}\right)$. Conclusion ?
- 9) Soit f dérivable sur \mathbb{R} . Etudier les implications: $\lim_{+\infty} f(x)$ existe (limite finie) $\begin{matrix} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{matrix}$ $\lim_{+\infty} f'(x) = 0$.
- 10) Soit f deux fois dérivable sur \mathbb{R} telle que $f > 0, f' > 0, f'' > 0$. Prouver que $f'(x) \rightarrow 0$ $\underset{x \rightarrow -\infty}{}$.
- 11) Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x) = \frac{x^n}{x-1}$. En déduire la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $g(x) = \frac{x^n}{x+1}$.
- 12) On pose $f(x) = e^{\sqrt{3}x} \sin(x)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 2^n e^{\sqrt{3}x} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$.
- 13) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = (x-a)^n (x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}(a)$.
- 14) Soit f dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$.
Prouver qu'il existe un point de C_f en lequel la tangente à C_f passe par le point $A\left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- 15) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = f'(a) = 0$. Prouver qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.
- 16) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$. (Appliquer Rolle à une fonction dans laquelle il y a du e^x).
- 17) Soit f de classe C^2 sur $[a, b]$ avec $f'(a) = f'(b) = 0$. Prouver que $\left|f(b) - f(a)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} M$ avec $M = \sup_{x \in [a, b]} \left|f''(x)\right|$.
- 18) On pose $P_n(x) = ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$. Montrer que la fonction $f(x) = (x^2 - 1)^n$ vérifie l'ED $(x^2 - 1)y' - 2nxy = 0$ et en déduire que P_n vérifie l'ED $(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$.
- 19) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
On suppose que (u_n) converge vers L tel que $|f'(L)| > 1$. Prouver que la suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
- 20) Soit f dérivable sur \mathbb{R}^+ telle que $f'(x) \rightarrow 0$ $\underset{x \rightarrow +\infty}{}$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$ $\underset{x \rightarrow +\infty}{}$. (Revenir à la définition de la limite $\forall \varepsilon, \exists A$)