# Dérivation. Accroissements finis

1) La fonction $f$ définie par $f(x) = (x^2 - 1)\arccos(x^2)$ est-elle définie et dérivable sur $[-1, 1]$ ?

2) La fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ est-elle dérivable sur son domaine de définition ?

3) On pose $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Préciser $D_f$ puis calculer et simplifier $f'(x)$. Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

4) On pose pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$. Prolonger $f$ par continuité en 0 , puis étudier la dérivabilité de $f$ en 0 .

5) Prouver que: $f$ est dérivable en $a \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ existe , mais que la réciproque est fausse.

6) Soit $f$ deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'' \leqslant 0$ et $f(a) = f(b) = 0$ . Prouver que $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$.

7) Montrer que seules les fonctions constantes $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifient: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\left| f(x) - f(y) \right| \leqslant (x-y)^2$.

8) Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Etudier les équivalences: a) $f$ est paire $\Leftrightarrow f'$ est impaire b) $f$ est impaire $\Leftrightarrow f'$ est paire .

9) Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ puis de $g(x) = \frac{1}{(ax+b)^k}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$) en exploitant le premier calcul.

10) Calculer la dérivée $n$ – ième de $f(x) = (x^2+1)\, e^{-x}$.

11) Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ avec $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telle que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $g(x^2) = f(x)$ .

12) Calculer $D_f$ puis la dérivée de $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{1/2 + \sqrt{x}}\right) + \arcsin\left(\sqrt{1/2 - \sqrt{x}}\right)$. Conclusion ?

13) Soit $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Etudier les implications: $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ existe (limite finie) $\overset{\Rightarrow}{\Leftarrow}$ $\lim\limits_{+\infty} f'(x) = 0$ .

14) Soit $f$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f > 0$ , $f' > 0$ , $f'' > 0$. Prouver que $f'(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ .

15) Avec le théorème des accroissements finis, démontrer que $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln(n)}{n^2}$

16) Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x) = \frac{x^n}{x-1}$. En déduire la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $g(x) = \frac{x^n}{x+1}$ .

17) On pose $f(x) = e^{\sqrt{3}\, x} \sin(x)$. Prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = 2^n e^{\sqrt{3}\, x} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$ .

18) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = (x-a)^n (x-b)^n$ . Calculer $f^{(n)}(a)$.

19) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Prouver qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + cx = a + b + c$

20) Soit $f$ dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in ]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$.

Prouver qu'il existe un point de $C_f$ en lequel la tangente à $C_f$ passe par le point $A\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$.

21) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = f'(a) = 0$ . Prouver qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

22) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Montrer qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$. (Appliquer Rolle à une fonction dans laquelle il y a du $e^x$ ).

---

23) Soit $f$ de classe $C^2$ sur $[a, b]$ avec $f'(a) = f'(b) = 0$. Prouver que $\left| f(b) - f(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} M$ avec $M = \sup_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right|$.

---

24) On pose $P_n(x) = \left(\left(x^2 - 1\right)^n\right)^{(n)}$. Montrer que la fonction $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^n$ vérifie l'ED $\left(x^2 - 1\right) y' - 2 n x y = 0$ et en déduire que $P_n$ vérifie l'ED $\left(x^2 - 1\right) y'' + 2 x y' - n(n+1) y = 0$.

---

25) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On suppose que $(u_n)$ converge vers $L$ tel que $|f'(L)| > 1$. Prouver que la suite $(u_n)$ est constante à partir d'un certain rang.

---

26) Soit $f$ dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. (Revenir à la définition de la limite $\forall \varepsilon, \exists$ A)

---