Suites

1) Etudier la convergence et calculer l'éventuelle limite des suites:

a) $u_n = \frac{\sin n^n}{\sqrt{n}}$ b) $u_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$ c) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ d) $u_n = \sqrt[n]{n^3}$ e) $u_n = \left(3^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}\right)^n$ f) $u_n = (3^n+2^n)^{\frac{1}{n}}$

2) Etudier la convergence et calculer l'éventuelle limite des suites:

a) $u_n = \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n}$ b) $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{1/n}$ c) $u_n = (n!)^{1/n}$ d) $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$ e) $u_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

3) Les affirmations suivantes sont toutes fausses: prouvez le !

a) Une suite bornée est convergente.

b) Une suite est convergente ou tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

c) Si u_n tend vers L alors il existe n tel que $u_n = \text{L}$

d) La somme de deux suites divergentes est divergente.

e) Une suite croissante et majorée par L converge vers L

f) Une suite positive non majorée tend vers $+\infty$

g) Si $u_{n+1}-u_n \longrightarrow 0$ alors (u_n) converge

h) Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow 1$ alors (u_n) converge

i) Si $u_{n+1}-u_n \longrightarrow 0$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow 1$

j) Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow 1$ alors $u_{n+1}-u_n \longrightarrow 0$

4) Calculer le terme général puis la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3}$.

5) Prouver que les suites $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$ sont adjacentes .

6) Calculer $A = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^p\right)$ puis $B = \lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^p\right)$ puis $C = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ et commenter le résultat.

7) Calculer si elle existe la limite de la suite (u_n) telle que $\frac{1}{2\sqrt{n+u_n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

8) Est-ce que la suite (u_n) de terme général $u_n = n!\left(1-\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}-...-\frac{n-1}{n!}\right)$ est convergente ?

9) Soient (u_n) et (v_n) deux suites de [0,1] telles que leur produit $(u_n\times v_n)$ converge vers $L = 1$.
Prouver que (u_n) et (v_n) convergent. Est-ce encore vrai si $L = 0$?

10) Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}$ telles que $u_n{}^2 + u_n\, v_n + v_n{}^2 \longrightarrow 0$. Prouver que (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

11) Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}$ telle que: $\forall\, k,\, n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_n\right| \leqslant \frac{k}{n}+\frac{1}{k}$. Prouver que (u_n) converge vers 0.

12) Soit (u_n) une suite bornée de réels. Montrer que la suite $v_n = \sup\left\{u_k \,/\, k \geqslant n\right\}$ est définie et convergente.

13) Sans chercher à calculer sa limite, démontrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ est convergente.

14) Sans chercher à calculer sa limite, démontrer que la suite de terme général $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+e^{-k}\right)$ est convergente.

15) On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n}-u_n \geqslant \frac{1}{2}$ et en déduire la limite de (u_n) .

16) Prouver que la suite de terme général $u_n = \sqrt{n} - \left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor$ est divergente.

17) On pose $u_n = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. a) Prouver que la suite (u_n) est convergente.

b) On pose $v_n = (n+1)\,u_n{}^2$. Montrer que (v_n) est décroissante. c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

---

18) a) Prouver que $\forall\, x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$ (On pourra encadrer $\int_x^{x+1} \frac{dt}{t}$)

b) Trouver la limite de $v_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$.

c) On pose $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n)$. Etudier le sens de variation de (u_n) et prouver qu'elle est convergente.

---

19)a) Le théorème: Si $\lim_{x\to+\infty,\, x\in\mathbb{R}} f(x)$ n'existe pas alors $\lim_{n\to+\infty, n\in\mathbb{N}} f(n)$ n'existe pas est-il vrai ?

b) Prouver par l'absurde que la suite $(\cos(n))$ diverge. On pourra utiliser la formule de trigonométrie $\cos(n-1) + \cos(n+1) = \ldots$

c) Prouver que la suite $(\sin(n))$ diverge .

---

20) Soit (u_n) une suite de réels telle que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Prouver que (u_n) converge.

---

21) Soit (a_n) une suite décroissante de réels qui tend vers 0. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, a_k$. Montrer que ses suites paires et impaires extraites sont adjacentes et en déduire que la suite (u_n) est convergente.

---

22) Calculer les limites de $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{1}}}}$ (n racines) et $v_n = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ldots}}}$ (n barres de fractions).

---

23) On pose $x_0 = x_1 = 1$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Exprimer y_{n+1} en fonction de y_n et prouver que la suite (y_n) converge.

---

24) Etudier les suites récurrentes définies par les relations:

a) $u_0 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ b) $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n{}^2}$ c) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n{}^2 + u_n$.

---

25) Soient $u_0 < v_0$ deux réels. On pose $\forall\; n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(2\,u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2\,v_n) \end{cases}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et calculer leur limite commune.

---

26) Soient (x_n) et (y_n) deux suites définies par $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\left(x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}\right)$.

On pose $z_n = x_n + i\,y_n$. Chercher une relation entre z_{n+1} et z_n et en déduire $\lim x_n$ et $\lim y_n$.

---

27) Soient$0 < a < b$ deux réels et (a_n) et (b_n) les deux suites de réels définies par :

$a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Prouver que ces deux suites convergent.

---

28) Soit (u_n) une suite de réels. Est-il vrai que: $(\forall\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \left(v_{k\,n}\right)$ converge$) \Rightarrow (u_n)$ converge ?

---

29) Soit (u_n) une suite bornée de réeels telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n+2})$. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Prouver que (v_n) converge et calculer sa limite.

---

30 On pose $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que (u_n) converge vers 1. La suite (u_n) est-elle monotone ?
