L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels

1) Vrai ou Faux ? (Justifier) A: $\forall\ a, b, c, d \in \mathbb{R}^+,\ a \leqslant b$ et $c \leqslant d \Rightarrow a \times c \leqslant b \times d$ B: $\forall\ a, b, c, d \in \mathbb{R}^{+*},\ a \leqslant b$ et $c \leqslant d \Rightarrow \frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{d}$
C: $\forall\ a, b, c, d \in \mathbb{R}^{+*},\ a \leqslant b$ et $c \leqslant d \Rightarrow \frac{a}{d} \leqslant \frac{b}{c}$

2) On note $I = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationnels. Vrai ou Faux ? (Justifier) A: $\forall\ (r, i) \in \mathbb{Q} \times I,\ r + i \in I$ B: $\forall\ (r, i) \in \mathbb{Q} \times I,\ r \times i \in I$
C: $\forall\ (i, i') \in I \times I,\ i + i' \in I$ D: $\forall\ (i, i') \in I \times I,\ i \times i' \in I$ E: $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*,\ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

3) En raisonnant par l'absurde, prouver que $\log_{10}(3)$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt[3]{2}$ sont des nombres réels irrationnels.

4) On admet que: $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n}$ est rationnel $\Leftrightarrow n$ est le carré d'un entier naturel.
Montrer que $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.

5) Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
a) Prouver que sup B majore A et en déduire que $\sup A \leqslant \sup B$. b) Prouver de manière analogue que $\inf A \geqslant \inf B$.

6) Trouver la plus petite constante $a \in]0, +\infty[$ telle que $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^+,\ x + y \leqslant a \sqrt{x^2 + y^2}$.

7) On pose $f_n(x) = n\, x^n (1 - x)$. Calculer $\sup \{f_n(x)\ /\ x \in [0, 1]\}$

8) Chercher (s'ils existent) inf E, sup E, min E, max E pour les ensembles suivants:
a) $A = \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Big/ a, b \in \mathbb{R}^{*+} \right\}$ (Poser $t = \frac{b}{a}$) b) $B = \left\{ (a + x)\left(b + \frac{1}{x}\right) \Big/ x \in \left]0, +\infty\right[\right\}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ donnés.
c) $C = \left\{ \frac{n}{n+p} \Big/ n, p \in \mathbb{N}^* \right\}$ d) $D = \left\{ \frac{a+b}{a^2+b^2} \Big/ a, b \in \mathbb{N}^* \right\}$ e) $E = \left\{ \frac{p}{p\,q+1} \Big/ p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$

9) Prouver que $\forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{2x+5}{x+2}$ est plus près de $\sqrt{5}$ que x ne l'est. (Traduire par une inégalité)

10) a) Prouver que: $\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ a\,b \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.
b) En déduire: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a\,b + b\,c + c\,a \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

11) Calculer le domaine de définition et simplifier les expressions (chercher des carrés sous les grandes racines...) de

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}}\ .$$

12) Prouver que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ -2 \leqslant 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor \leqslant 1$. (Encadrer $3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor$ en revenant à la définition de $\lfloor\ \rfloor$)

13) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \frac{\lfloor n\,x \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. 14) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor x \rfloor^2 = \lfloor x^2 \rfloor$

15)a) On pose $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Prouver que $x^3 = 40 + 6\,x$ et en déduire la valeur de x.
b) Trouver d'autres valeurs de a, b dans $\mathbb{N}^*$ telles que $y = \sqrt[3]{a + b\sqrt{2}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{2}}$ soit un entier.

16) Soient $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$. Prouver que tous les x_k valent 1 .

17) Soient x, y deux réels tels que $x < y$.
a) Prouver qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que: $\frac{1}{q} < y - x$ et $x < \frac{p}{q} < y$.
b) Peut-on en déduire que: $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow]x, y[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$?