

## L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels

1) Vrai ou Faux ? (Justifier) A:  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^+, a \leq b \text{ et } c \leq d \Rightarrow a \times c \leq b \times d$  B:  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^{+*}, a \leq b \text{ et } c \leq d \Rightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{d}$

C:  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^{+*}, a \leq b \text{ et } c \leq d \Rightarrow \frac{a}{d} \leq \frac{b}{c}$

2) On note  $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  l'ensemble des irrationnels. Vrai ou Faux ? (Justifier) A:  $\forall (r, i) \in \mathbb{Q} \times I, r + i \in I$  B:  $\forall (r, i) \in \mathbb{Q} \times I, r \times i \in I$   
C:  $\forall (i, i') \in I \times I, i + i' \in I$  D:  $\forall (i, i') \in I \times I, i \times i' \in I$  E:  $\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

3) En raisonnant par l'absurde, prouver que  $\log_{10}(3)$ ,  $\sqrt{3}$  et  $\sqrt[3]{2}$  sont des nombres réels irrationnels.

4) On admet que:  $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n}$  est rationnel  $\Leftrightarrow n$  est le carré d'un entier naturel.

Montrer que  $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$  et  $b = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  sont irrationnels.

5) Soient A et B deux parties non vides bornées de  $\mathbb{R}$  telles que  $A \subset B$ .

a) Prouver que  $\sup B$  majore A et en déduire que  $\sup A \leq \sup B$ . b) Prouver de manière analogue que  $\inf A \geq \inf B$ .

6) Trouver la plus petite constante  $a \in ]0, +\infty[$  telle que  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, x + y \leq a \sqrt{x^2 + y^2}$ .

7) On pose  $f_n(x) = nx^n(1-x)$ . Calculer  $\sup \{f_n(x) / x \in [0, 1]\}$

8) Chercher (s'ils existent)  $\inf E$ ,  $\sup E$ ,  $\min E$ ,  $\max E$  pour les ensembles suivants:

a)  $A = \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} / a, b \in \mathbb{R}^{+*} \right\}$  (Poser  $t = \frac{b}{a}$ ) b)  $B = \left\{ (a+x) \left( b + \frac{1}{x} \right) / x \in ]0, +\infty[ \right\}$  avec  $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$  donnés.

c)  $C = \left\{ \frac{n}{n+p} / n, p \in \mathbb{N}^* \right\}$  d)  $D = \left\{ \frac{a+b}{a^2+b^2} / a, b \in \mathbb{N}^* \right\}$  e)  $E = \left\{ \frac{p}{pq+1} / p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$

9) Prouver que  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{2x+5}{x+2}$  est plus près de  $\sqrt{5}$  que  $x$  ne l'est. (Traduire par une inégalité)

10) a) Prouver que:  $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .

b) En déduire:  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ .

11) Calculer le domaine de définition et simplifier les expressions (chercher des carrés sous les grandes racines...) de

$$f(x) = \sqrt{x+2} \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} \sqrt{x-1} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$$

12) Prouver que  $\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq 3 \lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor 3x \rfloor \leq 1$ . (Encadrer  $3 \lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor 3x \rfloor$  en revenant à la définition de  $\lfloor \cdot \rfloor$ )

13) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ . 14) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\lfloor x \rfloor^2 = \lfloor x^2 \rfloor$

15) a) On pose  $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ . Prouver que  $x^3 = 40 + 6x$  et en déduire la valeur de  $x$ .

b) Trouver d'autres valeurs de  $a, b$  dans  $\mathbb{N}^*$  telles que  $y = \sqrt[3]{a+b\sqrt{2}} + \sqrt[3]{a-b\sqrt{2}}$  soit un entier.

16) Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 = n$ . Prouver que tous les  $x_k$  valent 1.

17) Soient  $x, y$  deux réels tels que  $x < y$ .

a) Prouver qu'il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{Z}$  tels que:  $\frac{1}{q} < y - x$  et  $x < \frac{p}{q} < y$ .

b) Peut-on en déduire que:  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow ]x, y[ \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$  ?