

Ensembles

1) Ecrire le schéma des inclusions qu'il y a entre les ensembles suivants:

C = l'ensemble des carrés

Q = l'ensemble des quadrilatères

L = l'ensemble des losanges

T = l'ensemble des trapèzes
grammes

R = l'ensemble des rectangles

P = l'ensemble des parallélogrammes

2) Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

a) Prouver que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

b) Prouver que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

c) Montrer que $\overline{A \setminus B} = B \setminus A$

3) Ecrire $P(P(\{1\}))$

4) Est ce que $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} = \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$?

5) Déterminer $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

6) Soit E un ensemble.

a) Est-il vrai que: $\forall A, B, C \in P(E), A \subset B \cup C \Leftrightarrow A \subset B \text{ ou } A \subset C$?

b) Est-il vrai que: $\forall A, B, C \in P(E), A \subset B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } A \subset C$?

c) Est-il vrai que: $\forall A, B, C \in P(E), A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$?

7) Soit E un ensemble.

a) Prouver que: $\forall A, B \in P(E), A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$

b) Prouver que: $\forall A, B, C \in P(E), (A \cap B = A \cap C) \text{ et } (A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$

8) On pose $A = \left\{ \frac{p}{2q+1} \mid (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$. Prouver que $\mathbb{Z} \subset A \subset \mathbb{Q}$ et que les inclusions sont strictes.

9) Simplifier les ensembles $A = \{2m + 3n \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ et $B = \{2m + 3n \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$.

10) Est-ce-que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\} = \{(a, b, a + 2b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$?

11) a) Trouver une équation du second degré à coefficients entiers dont les réels $x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$ sont les deux solutions.

b) Prouver que l'ensemble S des réels solutions d'une équation du second degré à coefficients entiers est égal à l'ensemble

$$A = \left\{ p \pm \sqrt{q} \mid (p, q) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$$