Equations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes (exos 1 à 23), en précisant les intervalles de résolution.

1) $\left(1+x^2\right)y'+2\,x\,y=4\,x$ 2) $x\,y' + y = \text{Arctan}\,x$ 3) $\left(1-x^2\right)y'+x\,y+1=0$

4) $y' + y = \sin x$ 5) $x\,y' + y - \ln(x) = 0$ 6) $\left(1-x^2\right)y'-x\,y=1.$

7) $x\,y' + y = \cos(x)$ 8) $\left(1+\cos^2 x\right)y' - \sin(2\,x)\;y = \text{cosx}$ 9) $\text{sh}(x)\,y' - \text{ch}(x)\,y = 1$

10) $y' + y\tan(x) = \sin(2\,x)$ avec $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$ 11) $y''-y'+y=x^2$ (Chercher une solution polynôme)

12) $y'' - 4\,y' + 4\,y = 10\cos(2\,x) + 25\sin(2\,x)$ 13) $y''+y=2\cos^2 x$ 14) $y''+y'+y = \cos x$

15) $x\,y'' + 2\,y' + x\,y = 0$ (Faire le changement de fonction $z = x\,y$) 16) $y'-y\sin(x)+y^4\sin(2\,x)=0$ (Poser $z=\frac{1}{y^3}$)

17) $y'' - 2\,y' + y = 2\,\text{ch}\,x$ 18) $x^2\,y''+4\,x\,y'+\left(2-x^2\right)y = 0$ (Poser $z=x^2\,y$)

19) $x\,y'' - (1+x)\,y' + y = 1$ (Poser $z = y' - y$) 20) $y''+\omega^2\,y=\sin(\omega\,x)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2\,\omega$.

21) $y^2\,y'+y^3=e^x$ 22) $y''-y'-6\,y=e^{-2\,x}$ 23) $y''+y = \sin x$

24) On cherche les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant: $\forall\, x\in\mathbb{R}, f'(x)+f(-x)=e^x$. (1)
Prouver que f est solution de l'ED $y'' + y = 2\,\text{ch}(x)$ puis résoudre (1)

25) On cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant: $\forall\, x\in\mathbb{R}, f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (1)
Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie une ED très simple que l'on déterminera puis résoudre (1)

26) On cherche toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivables qui vérifient (1): $\forall\; x,y\in\mathbb{R},\; f(x+y) = f(x)f(y)$
a) Soit f une fonction dérivable vérifiant (1). Prouver que f est une solution de l'équation différentielle $y'=a\,y$ avec $a=f'(0)$.
b) Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivables qui vérifient (1): $\forall\; x,y\in\mathbb{R},\; f(x+y) = f(x)f(y)$.

27) Trouver toutes les fonctions $x(t)$, $y(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\begin{cases} x'(t)=y(t)+t^2 \\ y'(t)=x(t)-t^2 \end{cases}$.

28) On cherche les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant: $\forall\; x\in\mathbb{R},\; f''(x) + f(-x) = x$. (1)
On suppose que $f(x)$ est solution de (1).
On pose $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = f(x) - f(-x)$.
a) Prouver que g est paire et solution de $y'' + y = 0$.
b) Prouver que h est impaire et solution de $y'' - y = 2\,x$.
c) Résoudre (1)

29) Résoudre $\left(x^2+1\right)^2 y''+2\,x\left(x^2+1\right)y'+y=0$ en posant $t=\arctan(x)$. Exprimer les solutions sans les fonctions trigonométriques.

30) Résoudre $y''-2\,y'+2\,y=e^x\sin x$ (S'intéresser à l'ED $y''-2\,y'+2\,y=e^{(1+i)\,x}$)

31) Chercher une solution particulière $y=x^a$ de $x^2\,y''+x\,(x-7)\,y'+3\,(5-x)\,y=0$ puis résoudre cette équation en faisant le changement de fonction $y(x)=z(x)\,x^a$.