Nombres complexes - Trigonométrie

1) Dessiner l'ensemble des images des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z + \bar{z} + z\,\bar{z} = 1$. 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $|z| = |i - z| = |z - 2 + 3\,i|$.

---

3) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $|a| = |b| = 1$ et $a\,b \neq -1$. Prouver que $z = \frac{a+b}{1+a\,b} \in \mathbb{R}$.

---

4) En utilisant uniquement l'inégalité triangulaire, prouver que: $\forall\ a, b \in \mathbb{C}$, $|a| + |b| \leqslant |a + b| + |a - b|$.
On pourra remarquer que $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et $b = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}$.

---

5) En calculant z^2, trouver un argument de $z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

---

6) Mettre sous forme algébrique $a = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{10}$ et $b = \left(\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}\right)^{10}$. 7) Trouver les $n \in \mathbb{N}$ tels que $\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n$.

---

8) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer le module et un argument de $A = e^{i\,a} + e^{i\,b}$. (Factoriser par $e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$)

---

9) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 + i\,z)^4 - (1 - i\,z)^4 = 0$. 10) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 12\,z + 63 = 0$.

---

11) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z^2 - z + 1\right)^2 + \left(z^2 - 1\right)^2 = 0$. 12) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2\,z + i)^3 = (z + 1)^3$.

---

13) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + (6 + 4\,i)\,z^2 + (8 + 15\,i)\,z + 3 + 11\,i = 0$ (Commencer par chercher une racine réelle)

---

14) Trouver les racines imaginaires pures de $p(z) = z^4 - 4\,i\,z^3 + 3\,(1 - 4\,i)\,z^2 - (24 + 14\,i)\,z + 12\,(1 - 3\,i)$, puis résoudre $p(z) = 0$.

---

15) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = z + \bar{z}$. 16) Calculer sous forme algébrique les racines quatrièmes de $z = -119 - 120\,i$.

---

17) Soient A(0,2) , B(0,-2) , C(2,-1). On construit les triangles DAC et ECB isocèles, rectangles en D et E, extérieurs au triangle ABC. Prouver que OED est rectangle et isocèle. (Faire un dessin).

---

18) Soient A et B les images des solutions de $z^2 - (2 + 6\,i)\,z - 8 + 14\,i = 0$. Trouver C et D tels que ABCD soit un carré.

---

19) On note $j = e^{2\,i\,\pi/3}$. Prouver que $1 + j + j^2 = 0$ et que $j^3 = 1$. Soient A,B,C trois points du plan d'affixes a, b, c.
a) Prouver que: le triangle ABC est équilatéral direct $\Leftrightarrow a + b\,j + c\,j^2 = 0$ (Utiliser une rotation)
b) Prouver que: le triangle ABC est équilatéral $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a\,b + a\,c + b\,c$. (Exploiter a))

---

20) Simplifier $A(x) = \frac{\sin(3\,x)}{\sin x} - \frac{\cos(3\,x)}{\cos x}$ (préciser D_A) 21) Simplifier $C = \cos^4 x - \sin^4 x$ et $D = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\sin(x+y)\,\sin(x-y)}$.

---

22) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$. 23) Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

---

24) Linéariser $A = \sin^4 x$ et $B = \cos^3 x \sin^3 x$. 25) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(n\,x) = \sin(p\,x)$.

---

26) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Prouver que $\cos(4\,x) = \sin(x)$ et en déduire x . 27) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

---

28) On suppose que $a + b + c = \pi$. Simplifier $S = \cos^2(a) + \cos^2(b) + \cos^2(c) + 2\cos(a)\cos(b)\cos(c)$.

---

29) Prouver que $a = e^{2\,i\,\pi/5}$ est solution de l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ et en déduire la valeur exacte de $C = \cos(2\,\pi/5)$.

---

30) Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{3\,\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{5\,\pi}{14}\right) = \frac{1}{8}$. (Multiplier par $\cos\left(\frac{3\,\pi}{14}\right)$)