

Colle 05 - Du 15 octobre au 20 octobre 2018

- Fonctions circulaires réciproques - Equations différentielles

Colle 06 - Du 05 novembre au 10 novembre 2018

- Equations différentielles - Ensembles - L'ensemble \mathbb{R} des réels

Fonctions circulaires réciproques

- a) Arcsin : définition, propriétés, dérivée, graphe. b) Arccos : définition, propriétés, dérivée, graphe.
 c) Arctan : définition, propriétés, dérivée, graphe.

Equations différentielles

- a) Intégration par parties: version intégrales, versions primitives. Exemple: calcul de $\int \ln(x) dx$.
 b) EDL d'ordre 1: définition, équation homogène associée, solutions de l'équation homogène. Ensemble des solutions si l'on dispose d'une solution particulière. Méthode de "la variation de la constante" pour la résolution d'une EDL d'ordre 1.
 c) Problème de Cauchy pour une EDL d'ordre 1: définition et théorème.
 Principe de superposition des solutions pour une EDL d'ordre 1 ou 2.
 d) Solutions à valeurs dans \mathbb{R} de l'ED $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
 Ensemble des solutions de l'ED $ay'' + by' + cy = f(x)$ si l'on dispose d'une solution particulière $y_0(x)$.
 e) Recherche d'une solution particulière de l'ED $ay'' + by' + cy = A e^{\alpha x}$ avec $a, b, c, A, \alpha \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
 Recherche d'une solution particulière de l'ED $ay'' + by' + cy = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$ avec $a, b, c, A, B, \alpha \in \mathbb{R}$.

Ensembles

- a) Pour deux ensembles A et B , comment démontrer que $A \subset B$? que $A = B$?
 Intersection, union, complémentaire, différence de deux ensembles: définition et notation.
 b) Complémentaire d'une réunion ou d'une intersection, distributivité de l'union par rapport à l'intersection et vice versa.
 Ensemble des parties d'un ensemble, produit cartésien de deux ou plusieurs ensembles: définitions et notations.

L'ensemble \mathbb{R} des réels

- a) Relation d'ordre \leq : propriétés (antisymétrie, transitivité, compatibilité avec les opérations $+$ et \times).
 Valeur absolue: définition et propriétés.
 b) Définitions de majorant, partie majorée. Maximum (théorème et définition). Borne supérieure: définition, CNS d'existence.
 c) Partie entière: théorème et définition, graphe. Valeur approchée décimale à 10^{-n} près par excès ou défaut: théorème et définition.

Exemples d'exercices d'application directe du cours

Fonctions circulaires réciproques

- a) Prouver que $\forall x \in]-1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. b) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- c) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. d) Calculer $A = \arctan(2) + \arctan(3)$ en évaluant $\tan(A)$.
- e) Est-ce que $(\arctan \circ \operatorname{sh})' = \frac{1}{\operatorname{ch}}$? f) Résoudre l'équation $\cos(x) - 3 \sin(x) = 0$ dans \mathbb{R} .
- g) Simplifier pour $x \in [-1, 1]$ $f(x) = \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x)$ (commencer par dériver)

Equations différentielles

- a) Calculer avec une IPP $\int \ln(x) dx$ b) Calculer avec une IPP $\int \arctan(x) dx$
- c) Résoudre l'ED $x^2 y' + y = 0$ d) Trouver une solution particulière y de l'ED $y' + y = x^2$ et achever la résolution.
- e) Vérifier que $y(x) = \cos(x)$ est solution de l'ED $\sin(x) y' + \cos(x) y = \cos(2x)$ puis achever la résolution de cette ED.
- f) Calculer les solutions réelles de l'ED $y'' + 2y' + 2y = 0$ g) Trouver une solution particulière y de l'ED $y'' + y' + y = x^2$.
- h) Trouver une solution particulière y de l'ED $y'' + y = e^{-2x}$. i) Trouver une solution particulière y de l'ED $y'' + y = \cos(2x)$.

Ensembles

- a) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Prouver que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. b) Avec $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{c, d\}$, écrire en extension $A \times B$ et $P(A)$.
- c) Prouver que $\{(a+b, b, a-b)/(a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$.
- d) Montrer que $\{(a+b, b, a-b)/(a, b) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \mathbb{Z}^2$ mais que l'inclusion réciproque est fautive.
- e) Soient E un ensemble et A, B deux parties de E . Prouver que: $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

L'ensemble \mathbb{R} des réels

- a) Démontrer que $\min(]0, 2])$ n'existe pas. b) Prouver que si $\max(A)$ existe alors $\sup(A)$ existe et $\sup(A) = \max(A)$.
- c) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-2 \leq 3 \lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor 3x \rfloor \leq 1$. d) Tracer le graphe sur \mathbb{R} de $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
- e) Prouver que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
- f) Tracer le graphe sur \mathbb{R} de $f(x) = |x-1| + |x-3|$ g) Résoudre l'équation $2|x| + 1 = |x-2|$