

Colle 03 - Du 01 octobre au 06 octobre 2018

- Apprendre par cœur (sauf la formule du binôme) - Nombres complexes, trigonométrie.
 - Fonction, application, fonction réciproque - Fonction ln et fonctions qui s'en déduisent.

Colle 04 - Du 08 octobre au 13 octobre 2018

- Apprendre par cœur (sauf la formule du binôme) - Fonction, application, fonction réciproque
 - Fonction ln et fonctions qui s'en déduisent. - Fonctions circulaires réciproques

Apprendre par cœur

- a) Egalités remarquables: $(a \pm b)^2 = \dots$ $a^2 - b^2 = \dots$ $(a \pm b)^3 = \dots$ $a^3 \pm b^3 = \dots$ $a^3 \pm 1 = \dots$
 b) Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient d'une composée, d'une fonction réciproque.
 c) Trigonométrie, formules de base: $\cos^2 + \sin^2$, $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$.
 d) Sommes usuelles: somme géométrique, arithmétique, télescopique, somme des carrés.

Nombres complexes

- a) Ecriture algébrique ou trigonométrique d'un nombre complexe: définition, partie réelle et imaginaire, module et argument.
 b) Propriétés de calcul des conjugués (à définir) et du module (à définir).
 c) Notation $e^{i\theta}$, "justification". Argument d'un complexe: définition, propriétés.
 Propriétés de calcul des complexes sous forme trigonométrique. Formule de Moivre.
 d) Racine $n^{\text{ième}}$ d'un complexe: définition. Racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité: définition, valeurs, images dans le plan.
 Comment calculer sous forme algébrique les racines carrées d'un nombre complexe a ?
 e) Expression d'une distance ou de la mesure d'un angle avec un module ou un argument.
 Traduire avec les complexes l'alignement de points A, B, C ou l'orthogonalité des droites (AB) et (CD) .
 f) Ecriture complexe de la symétrie orthogonale par rapport à Ox , d'une homothétie (à définir), d'une rotation (à définir).
 g) Formules d'Euler. Formules $1 + e^{i\theta} = \dots$ et $1 - e^{i\theta} = \dots$ Exponentielle complexe: définition, propriété algébrique.
 h) Trigonométrie, formules de base: $\cos^2 + \sin^2$, $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$.
 i) Usage du cercle trigonométrique: comment retrouver rapidement $\cos(\pm x \pm a) = \dots$ $\sin(\pm x \pm a) = \dots$ avec $a \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.
 Solutions des équations trigonométriques $\cos(x) = \cos(a)$, $\sin(x) = \sin(a)$, $\tan(x) = \tan(a)$.
 j) Comment transformer des produits (sommes) de sinus ou cosinus en sommes (produits) de sinus ou cosinus?

Fonction, application, fonction réciproque

- a) Fonction, application: définitions, notation, ensemble de définition. Image, antécédent d'un élément par une fonction.
 b) Application identité, composée de deux applications. Fonction inversible, fonction réciproque: définitions
 c) Pour une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervalle): condition suffisante d'inversibilité et propriétés de la fonction réciproque.

Fonction ln et fonctions qui s'en déduisent

- a) Définition de x^n lorsque $n \in \mathbb{N}$, de x^{-n} lorsque $n \in \mathbb{N}$, de $\sqrt[n]{x}$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, de $x^{p/q}$ lorsque $p, q \in \mathbb{N}^*$, de x^a lorsque $a \in \mathbb{R}$.
 Règles de calcul: $x^a x^b = \dots$ $\frac{x^a}{x^b} = \dots$ $(x^a)^b = \dots$ $(xy)^a = \dots$
 b) Fonctions ln et exp: définitions, propriétés algébriques, limites des formes indéterminées usuelles, dérivées, graphes.

- c) Fonctions $x \rightarrow a^x$ et $x \rightarrow x^a$: définitions, dérivées, graphes suivant les valeurs de a .
- d) Fonctions ch et sh: définition, propriétés, graphes. Croissance comparée des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles.

Fonctions circulaires réciproques

- a) Arcsin : définition, propriétés, dérivée, graphe. b) Arccos : définition, propriétés, dérivée, graphe.
- c) Arctan : définition, propriétés, dérivée, graphe.

Exemples d'exercices d'application directe du cours

Nombres complexes

- a) Prouver que $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| = |z||z'|$. b) Prouver que $\forall z, t \in \mathbb{C}, \overline{z \times t} = \overline{z} \times \overline{t}$
- c) Prouver que $\forall a, b \in \mathbb{R}, e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$ d) Prouver que $\forall \theta \in \mathbb{R}, 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$
- e) Prouver que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. f) Calculer les racines carrées de $a = 3 + 2i$
- g) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2iz + 3 = 0$. h) Calculer les racines carrées de $a = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$
- i) Montrer que la somme S_n des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est nulle pour $n \geq 2$.
- j) Quelle est l'écriture complexe de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = y' O y$?
- k) Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\sin(x) = \sin(3x)$. l) Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\sin(x) = \cos(2x)$.
- m) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sin(x) = \sqrt{3} \cos(x)$. n) Factoriser $\cos(p) + \cos(q)$ et $\cos(p) - \cos(q)$

Fonction, application, fonction réciproque

- a) Sur \mathbb{R} on pose $f(x) = \frac{2x-1}{3x-2}$. Préciser D_f , calculer $f \circ f(x)$ pour $x \in D_f$. Est-ce que $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$?
- b) On pose pour $x \in \mathbb{R}: f(x) = x^3 + x + 1$. Montrer que f est inversible sur \mathbb{R} , préciser $D_{f^{-1}}$ et calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(3)$.
- c) On pose $f(x) = \cos^2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer les antécédents de $a = 1$ et $b = \frac{1}{4}$ par f .
- d) On pose pour $x \in \mathbb{R}: f(x) = x - 1, g(x) = x^2, h(x) = x + 1$. Calculer pour $x \in \mathbb{R}: f \circ (g \circ h)(x)$ et $h \circ (g \circ f)(x)$
- e) On pose pour $x \in \mathbb{R}: f(x) = -3x + 2$. Montrer que f est inversible sur \mathbb{R} , préciser $D_{f^{-1}}$ et calculer $f^{-1}(x)$.

Fonction ln et fonctions qui s'en déduisent

- a) Calculer la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $g(x) = \ln^2(x) - \sqrt{x}$. b) Démontrer que pour $\alpha > 0$ et $a > 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$.
- c) Prouver que: $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$. d) Prouver que $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$
- e) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\ln(|x+1|) - \ln(|x-1|) = \ln(2)$. f) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $e^{2x} + e^x - 6 = 0$.

Fonctions circulaires réciproques

- a) Prouver que $\forall x \in]-1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. b) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- c) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. d) Calculer $A = \arctan(2) + \arctan(3)$ en évaluant $\tan(A)$
- e) Est-ce que $(\arctan \circ \text{sh})' = \frac{1}{\text{ch}}$? f) Résoudre l'équation $\cos(x) - 3 \sin(x) = 0$ dans \mathbb{R} .
- g) Simplifier pour $x \in [-1, 1]$ $f(x) = \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x)$ (commencer par dériver)