

Colle 01 - Du 17 septembre au 22 septembre
--

- Apprendre par cœur (sauf les formules de dérivation de $u^{\circ v}$, u^{-1} et la formule du binôme)
- Exercices de révision de terminale : calculs algébriques, dérivées, résolution d'équation, sommes arithmétiques ou géométriques, un peu de trigonométrie
- Logique, Raisonnements, Quantificateurs.

Colle 02 - Du 24 septembre au 29 septembre
--

- Apprendre par cœur (sauf les formules de dérivation de $u^{\circ v}$, u^{-1} et la formule du binôme)
- Logique, Raisonnements, Quantificateurs.
- Nombres complexes, trigonométrie.

Apprendre par cœur

- a) Egalités remarquables: $(a \pm b)^2 = \dots$ $a^2 - b^2 = \dots$ $(a \pm b)^3 = \dots$ $a^3 \pm b^3 = \dots$ $a^3 \pm 1 = \dots$
- b) Formules de dérivation usuelles: $(\cos(u))' = \dots$ $(\sin(u))' = \dots$ $\tan' = \dots$ $(u^a)' = \dots$ $(\sqrt{u})' = \dots$ $(e^u)' = \dots$ $(\ln(|u|))' = \dots$
 Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient
- c) Trigonométrie, formules de base: $\cos^2 + \sin^2$, $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$.
- d) Sommes usuelles: somme géométrique, arithmétique, télescopique, somme des carrés.

Logique, raisonnements, quantificateurs

- a) En mathématiques, qu'est-ce qu'une définition, qu'est-ce qu'une affirmation, qu'est-ce qu'une démonstration ?
 Quelles sont les valeurs possibles d'une affirmation ?
- b) Définition du contraire d'une affirmation, du "ou", du "et".
 Distributivité du "ou" par rapport au "et" et vice versa. Négation d'un "ou", négation d'un "et".
- c) Implication, équivalence: définition. Comment démontrer qu'une implication, qu'une équivalence est vraie ? est fausse ?
- d) Quest-ce qu'un raisonnement par contraposée ? Quest-ce qu'un raisonnement par l'absurde ?
- e) Raisonnement par récurrence: principe, rédaction.
- f) Raisonnement par disjonction de cas: principe, rédaction.
- g) Raisonnement par analyse synthèse: principe, rédaction.
- h) Définition des affirmations $(E) : (\exists x \in E / A(x))$ et $(P) : (\forall x \in E, A(x))$. Comment démontrer ces affirmations ? Négation de ces affirmations.

Nombres complexes

- a) Ecriture algébrique ou trigonométrique d'un nombre complexe: définition, partie réelle et imaginaire, module et argument.
- b) Propriétés de calcul des conjugués (à définir) et du module (à définir).
- c) Notation $e^{i\theta}$, "justification". Argument d'un complexe: définition, propriétés.
 Propriétés de calcul des complexes sous forme trigonométrique. Formule de Moivre.
- d) Racine $n^{\text{ième}}$ d'un complexe: définition. Racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité: définition, valeurs, images dans le plan.
 Comment calculer sous forme algébrique les racines carrées d'un nombre complexe a ?
- e) Expression d'une distance ou de la mesure d'un angle avec un module ou un argument.
 Traduire avec les complexes l'alignement de points A, B, C ou l'orthogonalité des droites (AB) et (CD) .

- f) Ecriture complexe de la symétrie orthogonale par rapport à Ox , d'une homothétie (à définir), d'une rotation (à définir).
- g) Formules d'Euler. Formules $1 + e^{i\theta} = \dots$ et $1 - e^{i\theta} = \dots$
Exponentielle complexe: définition, propriété algébrique.
- h) Trigonométrie, formules de base: $\cos^2 + \sin^2$, $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\tan(a \pm b)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$.
- i) Usage du cercle trigonométrique: comment retrouver rapidement $\cos(\pm x \pm a) = \dots$ $\sin(\pm x \pm a) = \dots$ avec $a \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.
Solutions des équations trigonométriques $\cos(x) = \cos(a)$, $\sin(x) = \sin(a)$, $\tan(x) = \tan(a)$.
- j) Comment transformer des produits (sommes) de sinus ou cosinus en sommes (produits) de sinus ou cosinus ?

Exemples d'exercices d'application directe du cours

Apprendre par cœur

- a) Factoriser $(x+1)^3 + x^3$. b) Calculer $A = \sum_{k=51}^{100} k$ c) Calculer $S = \sum_{k=0}^9 \frac{(-1)^k}{2^k}$
- d) Développer très rapidement $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(x-1)$. e) Exprimer $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$ puis calculer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
- f) Quel est le domaine de définition et la dérivée de: $f(x) = (x^2 - 1)^{-3}$, $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $h(x) = \ln(\ln(x))$,
- g) Trouver deux entiers relatifs a et b tels que $\frac{\pi}{12} = a\frac{\pi}{3} + b\frac{\pi}{4}$ et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Logique, raisonnements, quantificateurs

- a) Si A et B sont deux affirmations, justifier que $\text{non}(A \Rightarrow B) = (A \text{ et non } B)$ et que $(\text{non } B \Rightarrow \text{non } A) = (A \Rightarrow B)$
- b) Prouver par disjonction de cas que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2}n(n+1) \in \mathbb{N}$.
- c) On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=1}^n k$. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.
- d) En raisonnant par l'absurde, prouver que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
- e) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ecrire la négation de: $A: \forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- f) Quelle est la valeur des affirmations $A: \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x \leq y$ et $B: \exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, x \leq y$?
- g) Est-il vrai que la somme de deux suites arithmétiques quelconques est une suite arithmétique ?

Nombres complexes

- a) Prouver que $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| = |z||z'|$. b) Prouver que $\forall z, t \in \mathbb{C}, \overline{z \times t} = \overline{z} \times \overline{t}$
- c) Prouver que $\forall a, b \in \mathbb{R}, e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$ d) Prouver que $\forall \theta \in \mathbb{R}, 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$
- e) Prouver que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. f) Calculer les racines carrées de $a = 3 + 2i$
- g) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2iz + 3 = 0$. h) Calculer les racines carrées de $a = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$
- i) Montrer que la somme S_n des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est nulle pour $n \geq 2$.
- j) Quelle est l'écriture complexe de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = y' Oy$?
- k) Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\sin(x) = \sin(3x)$. l) Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\sin(x) = \cos(2x)$.
- m) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sin(x) = \sqrt{3} \cos(x)$. n) Factoriser $\cos(p) + \cos(q)$ et $\cos(p) - \cos(q)$